# Kinematika hmotného bodu I.

Kinematikou hmotného bodu myslíme zkoumání zákonitostí pohybů těles. Hmotným bodem myslíme bod, jímž nahradíme skutečné reálné těleso. Hmotnost tělesa je soustředěna do jednoho bodu, proto hmotný bod. Při počítání s hmotným bodem zanedbáváme *především* rozměry tělesa.

- V kinematice se zabýváme fyzikálními veličinami **časem**, **dráhou**, **rychlostí** a **zrychlením**. Všechny tyto veličiny mají mezi sebou jasnou spojitost, kterou si vysvětlíme později.
  - **Čas** (time – t) – *základní jednotkou času je sekunda, která patří mezi jednotky soustavy SI.*
  - **Dráha** – *základní jednotkou dráhy je jeden metr, taktéž patří mezi jednotky soustavy SI a je definován, jako dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za* $\frac{1}{c} \doteq \frac{1}{299\,792\,458}$ *sekundy, kde c je rychlost světla ve vakuu.*
  - Obě další veličiny můžeme odvodit z těchto dvou!

- Průměrnou rychlost během pohybu můžeme spočítat tak, že vezmeme dráhu, kterou těleso urazilo, a vydělíme ji časem, za který ji urazilo:

$$v_{průměrná} = \frac{\Delta s_{celková}}{\Delta t_{celkový}}$$

- Z toho jasně plynou jednotky rychlosti, které tedy jsou $[\mathbf{v}] = \mathbf{1ms^{-1}}$.
- Pokud bychom však chtěli, a to je častější, tzv. okamžitou rychlost, musíme počítat s tím, že čas bude nulový, nulou však dělit nejde, tedy musíme spočíst limitu, když se změna času blíží k nule, tím dostaneme matematicky směrnici tečny ke grafu funkce rychlosti a její hodnota je právě okamžitá rychlost.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

- Matematicky tedy vyjádříme okamžitou rychlost jako derivaci funkce dráhy podle proměnné t.
- Pohyby **přímočaré** rozdělujeme na pohyby **rovnoměrné** a pohyby **nerovnoměrné**. Nerovnoměrných je spousta a nemůžeme je nijak jednotvárně popsat. Pohyby rovnoměrné máme dva – pohyb **rovnoměrný** a pohyb **rovnoměrně zrychlený**. Pohyb rovnoměrný je vlastně druh rovnoměrně zrychleného pohybu, pro který platí, že velikost zrychlení je rovna nule. Začneme s pohybem rovnoměrně zrychleným, abychom mohli vyvodit veškeré důležité vzorečky a poznámky o pohybu rovnoměrně zrychleném i rovnoměrném.

*Poznámky autora:*

- *Jednotky rychlosti mohou být odlišné. Typický příklad je MPH – Mile per Hour, tedy míle za hodinu. V Evropě je zavedený styl KMH – Kilometers per hour. Převod jednotek není nutný, avšak pro informaci platí, že* $1\ míle \doteq 1{,}6\ kilometru$. *Přesnější převod je* $1\ km = 0{,}621\ míle$.

# Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený

- U pohybu rovnoměrně zrychleného si musíme zavést další veličinu – zrychlení. Zrychlení nám říká, jak moc se mění rychlost tělesa v závislosti na čase. Podobně jako u rychlosti tedy vzoreček pro zrychlení vypadá takto:

$$a_{celkové} = \frac{\Delta v_{celkové}}{\Delta t_{celkový}}$$

- Jednotky zrychlení jsou tedy $[\mathbf{a}] = \mathbf{1ms^{-2}}$. Okamžité zrychlení můžeme opět vyjádřit vztahem:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

- Tedy zrychlení je derivace funkce rychlosti podle proměnné t.
- **Při rovnoměrně zrychleném pohybu počítáme s tím, že zrychlení je konstantní po celou dobu pohybu tělesa.** Toto zrychlení je nějaká konstanta – tedy číslo!
- Opačnou úvahou můžeme dojít ke vztahu, že funkce rychlosti je funkce prostá k funkci zrychlení a funkce dráhy je funkce prostá k funkci rychlosti. Z toho odvodíme pomocí integrálního počtu tyto vzorce pro výpočet:

$$v = \int a(t)\ dt = \int a\ dt = at + v_0$$

$$s = \int v(t)\ dt = \int (at + v_0)\ dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

- Setkáváme se zde s něčím, co označujeme jako $v_0$ a $s_0$. To je počáteční rychlost, kterou těleso má a dráha, kterou těleso urazilo před námi zkoumaným pohybem. Chceme-li totiž spočítat uraženou dráhu kapky vody, která už padá nějakou dobu, tak dráha, kterou urazí pod námi zkoumaným pohybem je $\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ a poté označíme $s_0$ jako dráhu, kterou urazila předtím. Tím získáme dráhu, kterou kapka urazila za celou svoji cestu.
- Nyní nás čeká ještě odvození vzorečku pomocí určitého integrálu – tedy obsahu plochy pod grafem. Ta udává, jakou změnu dráhy či rychlosti těleso urazilo mezi časem $t_1$ a $t_2$, které si můžeme libovolně zvolit. Musí však platit, že $|t_1| < |t_2|$, jinak úloha nedává smysl, čas totiž nemůže běžet pozpátku.

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a\ dt = (at_2 + v_0) - (at_1 + v_0) = a(t_2 - t_1)$$

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} (at + v_0)\ dt = \frac{a}{2}({t_2}^2 - {t_1}^2)$$

- *Poznámka: Má-li těleso záporné zrychlení a < 0, platí, že těleso zpomaluje.*

# Pohyb rovnoměrný

- Pohybem rovnoměrným máme na mysli pohyb, jehož zrychlení je 0, opět můžeme použít úvahu přes integrální počet:

$$v = \int a(t)\ dt = \int 0\ dt = v_0$$

$$s = \int v(t)\ dt = \int (v_0)\, dt = v_0 t + s_0 = vt + s_0$$

- Vidíme, že pokud je zrychlení nula, tak vstupní rychlost tělesa $v_0$ je konstantní v jakýkoliv čas pohybu. U dráhy pak můžeme vidět, že se spočte jako součet dráhy $s_0$ a součinu rychlosti a času.
- Jelikož je zrychlení definováno jako změna rychlost za čas, je jasné, že pohyb rovnoměrný musí být zároveň i přímočarý, jelikož rychlost je vektor, tedy i změna směru potřebuje zrychlení.
- A jak to vypadá se změnami? Co vlastně očekáváme? Pokud je rychlost stále stejná, její rozdíl za jakékoliv dva časy bud nulový. A dráha? Ta by se měla rovnat součinu rychlosti a času dle úplně prvního uvedeného vzorečku $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = v\Delta t$. Vyjde to opravdu? Podívejme se:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} 0\ dt = v_0 - v_0 = 0$$

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v\ dt = vt_2 - vt_1 = v\,\Delta t$$

- Oba naše vzorce se potvrdily, a tedy naše úvaha je správná.

# Volný pád

- Volným pádem máme na mysli pohyb, jehož zrychlení způsobuje tíhová síla – dle 2. Newtonova pohybového zákona F = m a můžeme zjistit, že tato síla způsobuje gravitační zrychlení g.
- Volný pád je tedy pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený, jehož směr je svislý – tedy má stejný směr jako výslednice gravitační a odstředivé síly (tedy síly tíhové).
- *Poznámka: Těleso nepadá směrem do středu Země, pouze přibližně.*
- Za předpokladu, že a = g, můžeme si vzorečky upravit na tyto:

$$\text{Uražená dráha: } \boldsymbol{s = \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\textit{Aktuální výška}: \boldsymbol{h = h_0 - s = h_0 - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\textit{Aktuální rychlost tělesa}: \boldsymbol{v = gt}$$

- Pro všechny tyto vzorečky počítáme s tím, že tělesu nepřidáváme žádnou počáteční rychlost. Pokud bychom ji však přidali, musím si vzorečky důsledně upravit.

$$\text{Uražená dráha: } \boldsymbol{s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$$

$$Aktuální\ výška: \boldsymbol{h = h_0 - s = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$Aktuální\ rychlost\ tělesa: \boldsymbol{v = v_0 + g t}$$

# Rovnoměrný pohyb po kružnici

- Rovnoměrný pohyb po kružnici je pohyb, jehož trajektorií je kružnice a jehož okamžitá rychlost je stálá.
- Souřadnice **x** a **y** můžeme určit pomocí goniometrických funkcí takto:

$$\boldsymbol{x = r\cos\varphi = r\ \cos(\omega t)}$$

$$\boldsymbol{y = r\sin\ \varphi = r\sin(\omega t)}$$

- Jelikož rychlost je vektorová veličina, tak její změna může být jen změna směru, proto platí, že i změna směru rychlosti má zrychlení. Tomuto zrychlení říkáme zrychlení dostředivé. Abychom ho však byli schopni definovat, musíme si nejdříve určit, co to je tzv. **úhlová rychlost ω**.

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

- Tím spočítáme zároveň i okamžitou rychlost, protože jsme si řekli, že je po celou dobu pohybu konstantní.
- Řekli jsme si taktéž, že zrychlení je změna rychlosti za čas, tedy – derivace funkce rychlosti podle proměnné t. Pro náš pohyb po kružnici použijeme tzv. **úhlové zrychlení**:

$$\varepsilon = \left(\boldsymbol{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}\right)' = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t^2} = -\frac{\omega}{\Delta t}$$

- Základními jednotkami úhlové rychlosti jsou $[\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{1\,rad.s^{-1}}$ a základními jednotkami úhlového zrychlení jsou $[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{1\,rad.s^{-2}}$.
- Úhly tedy měříme v radiánech. Jelikož radián je jednotka, která byla zavedena tak, že 2π je obvod jednotkové kružnice, tedy 2πr je obvod kružnice s poloměrem r. Díky takto zavedené definici, když 360° = 2π radiánů, můžeme říct, že dráha uraženého tělesa je rovna:

$$\boldsymbol{s = \Delta\varphi\, r}$$

- Dvě tělesa, kdy obě se budou pohybovat rychlostí ω, avšak jedno po kružnici s poloměrem $r_1$ a druhé s poloměrem $r_2$, budou mít jiné uražené vzdálenosti, tedy i jiné okamžité rychlosti, které u tohoto pohybu říkáme **rychlost obvodová**.

- Rychlost máme již definovanou vztahem $\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}}$. Stačí si dosadit to, čím jsme si vyjádřili dráhu:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{r}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}$$

- Poslední veličina, která nám vyplývá z teorie, je tzv. **dostředivé zrychlení**. To je zrychlení, které vyplývá z 2. Newtonova pohybového zákona. Na změnu směru totiž potřebujeme sílu, čímž zjistíme, že existuje i zrychlení. Toto zrychlení směřuje do středu, proto mu říkáme dostředivé. Pokud se jedná o pohyb o kružnici, je toto zrychlení kolmé na směr obvodové rychlosti.
- Dostředivé zrychlení tedy způsobuje změnu směru. Oproti tomu změnu rychlosti způsobuje tzv. tečné zrychlení – v případě přímočarého pohybu, je tečna přímky opět samotná přímka, proto má zrychlení stejnou směrovou orientaci jako rychlost pohybu.
- Zjištění dostředivého zrychlení potřebuje trošku složitější matematickou úvahu – i tak to ale není nic složitého. Pro $\Delta\varphi$, které se limitně blíží k nule, platí, že $\sin\varphi = \varphi$.

- Dostředivé zrychlení můžeme odvodit vztahem:

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = \Delta\varphi = \frac{s}{r}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = \Delta\,\varphi = \frac{\Delta v}{v} \rightarrow \Delta v = v\Delta\varphi$$

$$a_d = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta s}{r\,\Delta t} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\boldsymbol{a_d} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega^2 r}$$

- Další z podstatných veličin je **frekvence** a **perioda**.
  - Perioda nám udává dobu, za kterou těleso oběhne celou kružnici, značíme ji T a její jednotky jsou [T] = 1s.
  - Frekvence nám říká, kolikrát těleso oběhne kružnici za vteřinu. Značíme ji malým f a jednotky jsou [f] = 1Hz.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{2\pi f};\;\; \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}}$$

# Příklady

**Vlak, který vyjížděl ze zastávky rovnoměrně zrychleným pohybem, získal během 10 s rychlost 0,6 $ms^{-1}$. Za jakou dobu získá rychlost 3 $ms^{-1}$?**

- *Vyjádříme si čas $t_2$ z úvahy, že zrychlení je stále stejné:*

$$a = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}; a = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta v_2 \Delta t_1}{\Delta v_1} = \frac{3 * 10}{\frac{3}{5}} = 50\ s$$

- Vlaku tedy trvá 50 s, než zrychlí na 3 $ms^{-1}$.

**Automobil, který se rozjížděl rovnoměrně zrychleným pohybem, dosáhl rychlosti 100 $kmh^{-1}$ za 6 s. Určete dráhu, kterou přitom urazil.**

- *Nejdříve si musíme převést kilometry za hodinu na metry za sekundu.*

$$100\ kmh^{-1} = \frac{100}{3{,}6} ms^{-1}$$

- *Nyní si upravíme vzoreček pro uraženou dráhu (to je to, co chceme počítat):*

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} \Delta v \Delta t = \frac{\frac{100}{3{,}6} * 6}{2} m = \frac{500}{6} m = 83{,}\overline{33} m$$

- Automobil ujede přibližně 83 m.

**Těleso, které bylo na začátku v klidu, se začalo pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením 8 $ms^{-2}$. Jak velkou rychlost mělo na konci dráhy dlouhé 100 m?**

- *První fáze je odvození vzorečku pro počítání takovéto úlohy:*

$$\Delta s = \frac{1}{2} a\ \Delta t^2 \rightarrow\ \Delta t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$\Delta v = a\ \Delta t = a \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = 40\ ms^{-1}$$

- Těleso má na konci dráhy dlouhé 100 m rychlost 40 $ms^{-1}$.

**Určete úhlovou rychlost, kterou rotuje Země kolem své osy. Jaká je velikost rychlosti bodů ležících na rovníku? Střední průměr země je 6 400 km.**

- *Víme, že Země se otočí kolem své osy jednou za 24 hodin, tedy T = 24 h.*

$$\omega = \frac{2\pi}{24 * 60 * 60} \doteq 7{,}3 * 10^{-5}\ rad.s^{-1}$$

- *Když známe úhlovou rychlost, není problém dopočíst se rychlosti na rovníku:*

$$v = \omega r = 7{,}3 * 10^{-5} * 6{,}4 * 10^{6} ms^{-1} = 467{,}2\ ms^{-1} \doteq 470\ ms^{-1}$$

- Úhlová rychlost Země je tedy 7,3 * $10^{-5}$ rad. $s^{-1}$ a rychlost těles na rovníku 470 $ms^{-1}$.

**Těleso padající volným pádem urazilo za poslední 0,5 s dráhu 10 m. Určete rychlost tělesa v okamžiku dopadu. Tíhové zrychlení uvažujme 10 ms$^{-2}$.**

- *Jako první si napíšeme do vzorce dráhy, co známe, zároveň si vyjádříme rychlost $v_0$ ze vzorce $v = v_0 + gt$.*

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow s = (v - gt)t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$s = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = \frac{s + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{10 + \frac{1}{2}10\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} ms^{-1} = 2\left(10 + \frac{5}{4}\right) ms^{-1} = 22{,}5\ ms^{-1}$$

- Těleso dopadlo s rychlostí 22,5 ms$^{-1}$.

**Kolo o poloměru 0,4 m se otáčí úhlovou rychlostí 31,4 rad.s$^{-1}$. Určete velikost rychlosti bodů na obvodu kola a velikosti jejich normálového zrychlení.**

- *Nejprve si spočteme rychlost. Jelikož známe poloměr i úhlovou rychlost, nebude to problém:*

$$v = \omega\, r = 31{,}4 * 0{,}4 = 12{,}56\ ms^{-1}$$

- *Normálové (v případě kruhového pohybu dostředivé) zrychlení vypočteme taktéž ze zadaných veličin (nebo můžeme použít vypočtenou rychlost).*

$$a_n = \omega^2 r = 31{,}4^2\ 0{,}4 = 394{,}4\ ms^{-2}$$

- Rychlost bodů je přibližně 13 ms$^{-1}$ a jejich normálové zrychlení odpovídá přibližně 394 ms$^{-2}$.

**Setrvačník koná 450 otáček za minutu. Určete velikost normálového zrychlení bodů setrvačníku, které jsou ve vzdálenosti 10 cm od osy otáčení. Kolikrát se zvětší velikost zrychlení těchto bodů, zvětší-li se počet otáček na dvojnásobek?**

- *450 otáček za minutu si nejprve převedeme na otáčky za vteřinu – tím zjistíme frekvenci pohybu…*

$$f = \frac{450}{60} = 7{,}5\ Hz$$

- *Z frekvence jsme nyní schopni spočítat úhlovou rychlost:*

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\ 7{,}5 = 15\pi\ rad.s^{-1}$$

- *Normálové zrychlení už spočteme snadno dle vzorečku, pozor na jednotky poloměru:*

$$a_n = \omega^2 r = 225\pi^2 * 0{,}1 \doteq 222{,}1\ ms^{-2}$$

- *Jak se zvětší zrychlení, si můžeme vyjádřit z následujícího odvození:*

$$a_{n_1} = \left(2\pi\frac{x}{60}\right)^2 r = \frac{\pi^2 x^2 r}{900}$$

$$a_{n_2} = \left(2\pi\frac{2x}{60}\right)^2 r = \frac{\pi^2 4x^2 r}{900}$$

- Normálové zrychlení pohybu ve vzdálenosti 10cm je 222 ms$^{-2}$. Při dvojnásobné úhlové rychlosti tělesa by bylo zrychlení čtyřikrát větší.